ЗАДАЧА О СКОЛЬЖЕНИИ ТЕЛА ПО ГЛАДКОЙ ГОРКЕ ЗАДАННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Высота и длина горки

$H0 := 5 \qquad L0 := 4 \qquad \kappa := \frac{H0}{L0}$

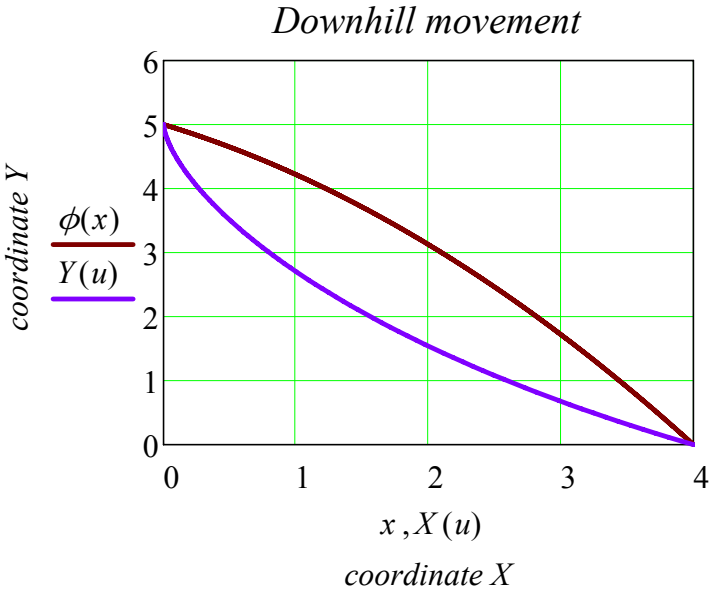
Для сравнения выбираются две кривые, описывающие форму горки - парабола и циклоида (брахистрохрона)

Уравнение параболы: $n := 2$

$$\phi(x) := \frac{H1}{n}\cdot\left[n - \frac{x}{L1} - (n-1)\left(\frac{x}{L1}\right)^2\right] \qquad \phi1(x) := \frac{d}{dx}\phi(x)$$

Уравнение циклоиды:

$$X(u) := C1\cdot(u - sin(u)) \qquad Y(u) := H1 - C1\cdot(1 - cos(u))$$



Связь параметра циклоиды и времени:

$$u(t) := \sqrt{\frac{g}{C1}}\cdot t$$

$0 \le u \le u_1$

$C1 = 3.405\,m$

$u1 = 2.058$

Общее время спуска по циклоиде:

$$T1 := u1\cdot\sqrt{\frac{C1}{g}}$$

$T1 = 1.213\,s$

Общее время спуска по параболе

$$T2 := \frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^{L1}\sqrt{\frac{1+\phi1(x)^2}{H1-\phi(x)}}\,dx$$

$T2 = 1.447\,s$

Решаем дифференциальное уравнение для движения точки на параболе:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\sqrt{2g\frac{H-y(x)}{1+y'^{2}(x)}} \qquad \xi(t)=1-\frac{x(t)}{L} \qquad t=T2\cdot\left(1-\frac{\tau}{\tau 0}\right)$$

$N0 := 1000$ Число расчетных точек на интервале от *0* до *T2*.

$\tau 0 := T2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot g\cdot H1}{L1^{2}}}$ Безразмерное обратное время τ от *0* до τ*0*.

$\tau 0 = 3.582$ Интегрируем уравнения движения.

Given

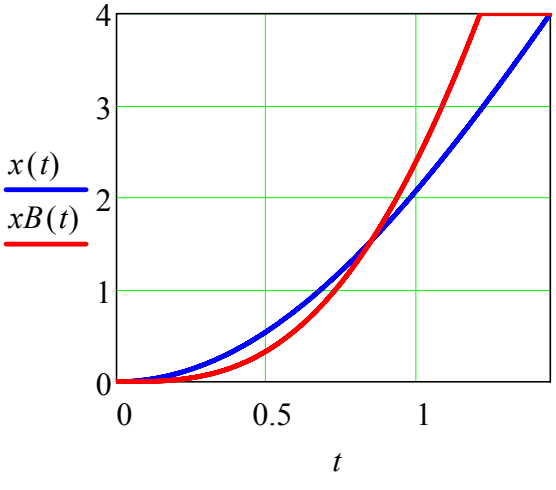
$$\frac{d}{d\tau}\xi(\tau)=\sqrt{\frac{1-\xi(\tau)+(n-1)\cdot(1-\xi(\tau))^{2}}{n+\frac{\kappa^{2}}{n}\left[1+2\cdot(n-1)(1-\xi(\tau))\right]^{2}}} \qquad \xi(0)=0$$

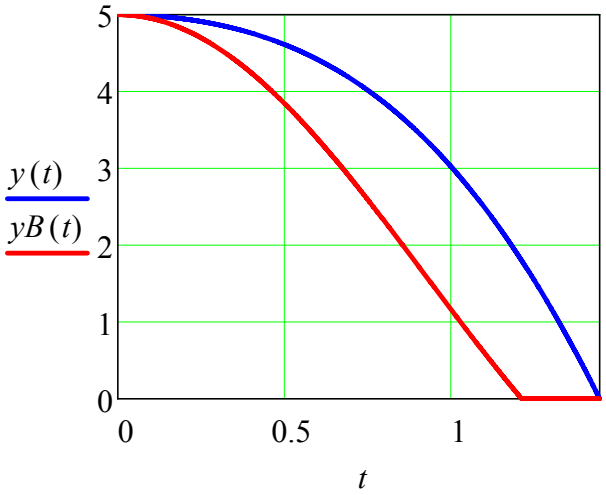
$\xi := Odesolve(\tau, 3.52896, N0)$

Законы движения точек по параболе и брахистохроне:

$$x(t) := L1\cdot\left[1-\xi\left[\tau 0\cdot\left(1-\frac{t}{T2}\right)\right]\right] \qquad y(t) := \phi(x(t))$$

$$xB(t)=C1\cdot\left(u(t)-\sin u(t)\right) \qquad yB(t)=H1-C1\cdot\left(1-\cos u(t)\right)$$





Моделирования движения (замедление в 4 раза):

Скорость видео-потока (кадры/секунду) $Vrate := 10 \cdot \frac{1}{s}$ $kT := 4$

Текущее время (с):

$$t := \frac{FRAME + 0.9}{kT \cdot Vrate}$$

Число видеокадров: $NF = 56$

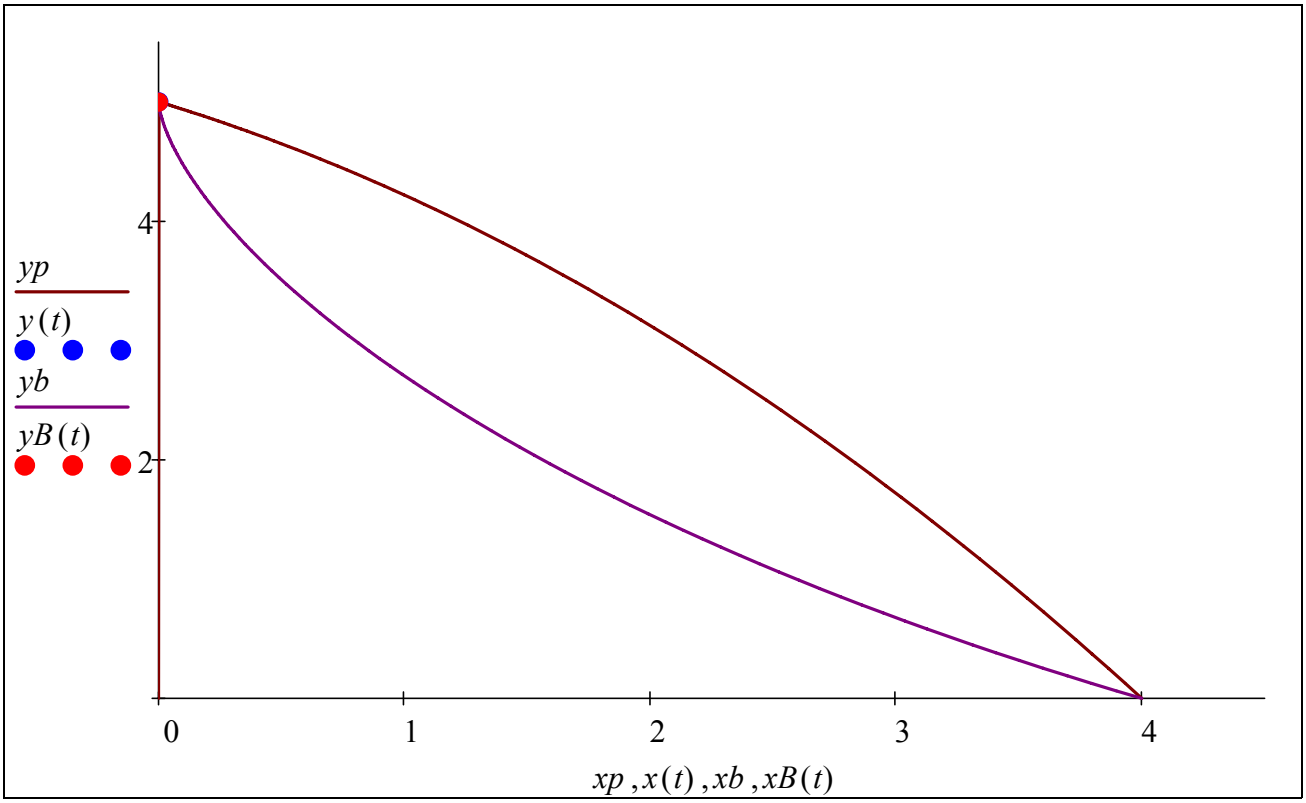
ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ ПО ПАРАБОЛЕ И БРАХИСТОХРОНЕ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ
(замедление в 4 раза):

Текущее время (с) $t = 0.023\ s$

Декартовы координаты тел (м)

Точка на параболе: $x(t) = 0\ m$ $y(t) = 5\ m$

Точка на брахистохроне: $xB(t) = 0\ m$ $yB(t) = 5\ m$



$$C0 := \sqrt{\frac{H0^2 + L0^2}{2}} \qquad u0 := \frac{\pi}{2} \qquad Given$$

$$C0 \cdot (u0 - \sin(u0)) = L0 \qquad C0 \cdot (1 - \cos(u0)) = H0$$

$$PAR := Find(C0, u0)$$

$$C1 := PAR_0 \cdot m \qquad u1 := PAR_1 \qquad H1 := H0 \cdot m \qquad L1 := L0 \cdot m$$

$$C1 \cdot (u1 - \sin(u1)) = 4\,m \qquad C1 \cdot (1 - \cos(u1)) = 5\,m$$

$$xB(t) := \begin{cases} C1\cdot(u(t) - sin(u(t))) & if \ \ t \le T1 \\ L1 & if \ \ t > T1 \end{cases}$$

$$yB(t) := \begin{cases} H1 - C1\cdot(1 - cos(u(t))) & if \ \ t \le T1 \\ 0 & if \ \ t > T1 \end{cases}$$

Рисуем горку:

$N1 := 100 \qquad i := 2 .. N1 \qquad t1_i := \frac{T2}{N1}\cdot i$

$xp_i := x\left(t1_i\right) \qquad yp_i := y\left(t1_i\right)$

Рисуем брахистохрону:

$N2 := 100 \qquad j := 0 .. N2 \qquad u2_j := \frac{u1}{N2}\cdot j$

$xb_j := X\left(u2_j\right)$

$yb_j := Y\left(u2_j\right)$

Вычисляемые параметры движения:

$$NF := kT \cdot trunc(Vrate \cdot T2)$$