

Перейдем к изучению конкретных специальных функций: цилиндрических и сферических функций, а также полиномов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

ЧАСТЬ I

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Цилиндрические функции

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad & \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \\ & \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

называемому уравнением цилиндрических функций n -го порядка. Это уравнение часто называют также уравнением Бесселя n -го порядка.

Характерными задачами (см. главы V, VI и VII), приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \quad (3)$$

Полагая $u = R\Phi$ и разделяя в (3) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) R = 0$$

и

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\lambda = n^2$, где n — целое число. Полагая затем $x = kr$, приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad R(r) = y(kr)$$

или

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Тогда из второго уравнения (5), в силу (6), будем иметь

$$a_1 = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) дает рекуррентную формулу для определения a_k через a_{k-2} :

$$a_k = - \frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}. \quad (9)$$

Отсюда и из (8) заключаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Если ν вещественно, то при $\sigma = -\nu$ решение обращается в бесконечность в точке $x = 0$.

Остановимся на случае $\sigma = \nu$. Из (9) следует, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий:

$$a_{2m} = -a_{2m-2} \frac{1}{2^2 m(m + \nu)}. \quad (10)$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти выражение a_{2m} через a_0

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m! (\nu + 1)(\nu + 2) \dots (\nu + m)}. \quad (11)$$

Воспользуемся свойством гамма-функции $\Gamma(s)^1$

$$\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s) = \dots = s(s - 1) \dots (s - n)\Gamma(s - n).$$

Если s — целое число, то

$$\Gamma(s + 1) = s!$$

Коэффициент a_0 до сих пор оставался произвольным. Если $\nu \neq -n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} \quad (12)$$

и используя отмеченное выше свойство гамма-функций, получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} \Gamma(k + 1) \Gamma(k + \nu + 1)}. \quad (13)$$

Если же $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu + 1)}, \quad (12')$$

получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu} \Gamma(k + 1) \Gamma(k - \nu + 1)}. \quad (14)$$

¹⁾ Б. М. Буда к, С. В. Фо м и н, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

По-прежнему все коэффициенты $a_1, a_3, \dots, a_{2n-1}$ равны нулю, но для a_{2n+1} получаем уравнение $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$, которое удовлетворяется при любом значении a_{2n+1} . При $k > n$ коэффициент a_{2k+1} определяется равенством

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5) \dots 2 \cdot 4 \dots (2k-2n)}.$$

Полагая $a_{2n+1} = 0$, $a_0 = \frac{1}{2^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)}$, получаем формулу (14).

Таким образом, при $\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ не требуется никакого изменения в определении функции $J_\nu(x)$. Формулы (15) и (16) остаются в силе.

Отметим, что формула (16) определяет $J_{-\nu}(x)$ лишь для нецелых значений ν , поскольку определение a_0 по формулам (12) при целых отрицательных $\nu = -n$ лишено смысла. Продолжим по непрерывности (16) на целые значения $\nu = n$. Поскольку $\Gamma(k - n + 1) = \pm\infty$ для $k \leq k_0 = n - 1$, суммирование (16) фактически начинается со значений $k = k_0 + 1 = n$. Изменяя в (16) индекс суммирования $k = n + k'$, получаем:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k' + n + 1) \Gamma(k' + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k' + n} = (-1)^n J_n(x),$$

так как суммирование начинается с $k' = 0$.

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя первого рода нулевого ($n = 0$) и первого ($n = 1$) порядков:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ наиболее часто встречаются в приложениях и для них имеются подробные таблицы¹⁾. На стр. 726 приводятся графики $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ (n — целое число), как мы видели, линейно зависимы

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Для нецелых значений ν функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы. В самом деле, $J_\nu(x)$ имеет нуль а $J_{-\nu}(x)$ — полюс ν -го порядка в точке $x = 0$. Таким образом, если ν — нецелое

¹⁾ Во всех таблицах специальных функций всегда имеются таблицы для бесселевых функций первого рода (см., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964, где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ даны с пятью знаками для значений x в интервале от 0 до 14,9).

число, то всякое решение $y_\nu(x)$ уравнения Бесселя (1) может быть представлено в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Если ищется ограниченное решение уравнения (1), то $C_2 = 0$ и

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \nu > 0.$$

2. Рекуррентные формулы. Установим следующие соотношения, существующие между функциями Бесселя первого рода различных порядков,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) = - \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (18)$$

Эти формулы проверяются непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций. Покажем, например, справедливость соотношения (17)

$$\begin{aligned} x^\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) &= x^\nu \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k-1} 2k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+(\nu-1)}. \end{aligned}$$

В последней сумме k меняются от 1 до ∞ . Введем новый индекс суммирования $l = k - 1$, который будет меняться от 0 до ∞ . Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} x^\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) &= \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\Gamma(l+1) \Gamma[l+(\nu+1)+1]} \left(\frac{x}{2} \right)^{[2l+(\nu+1)]} = -J_{\nu+1}(x), \end{aligned}$$

что и доказывает формулу (17). Справедливость формулы (18) доказывается аналогично.

Отметим два важных частных случая рекуррентных формул. При $\nu = 0$ из (17) следует:

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (19)$$

Для случая $\nu = 1$ формула (18) дает:

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x) \quad \text{или} \quad xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi. \quad (20)$$

Установим рекуррентные формулы, связывающие $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$. Производя дифференцирование в (17) и (18), получаем:

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \quad (17')$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \quad (18')$$

Складывая и вычитая (17') и (18'), находим рекуррентные формулы

$$\left. \begin{aligned} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J'_\nu(x). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

С помощью формулы (21) можно вычислять $J_{\nu+1}(x)$, если известны $J_\nu(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_\nu(x)}{x}. \quad (21')$$

3. Функции полуцелого порядка. Найдем выражения для функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2m}, \quad (22)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2+2m}. \quad (23)$$

Пользуясь свойством гамма-функции, находим:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)}{2^{m+1}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2^m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя (24) в формулы (22) и (23), получаем:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad (25)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}. \quad (26)$$

Нетрудно видеть, что сумма в (25) представляет собой разложение $\sin x$, а сумма в (26) — разложение $\cos x$ по степеням x . Таким образом, $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ выражаются через элементарные функции

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad (27)$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \quad (28)$$

Рассмотрим функции $J_{n+1/2}(x)$, где n — целое число. Из (21') следует:

$$\begin{aligned} J_{3/2}(x) &= \frac{1}{x} J_{1/2}(x) - J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{5/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -\sin x + \frac{3}{x} \left[\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{x} \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin(x - \pi) \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) + \cos(x - \pi) \cdot \frac{3}{x} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно формулу (21') найдем:

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) P_n \left(\frac{1}{x} \right) + \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} \right) Q_n \left(\frac{1}{x} \right) \right\}, \quad (29)$$

где $P_n \left(\frac{1}{x} \right)$ — многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_n \left(\frac{1}{x} \right)$ — многочлен степени $n-1$. Отметим, что $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$.

§4. Асимптотический порядок цилиндрических функций. Решения уравнения Бесселя обычно называют цилиндрическими функциями. В п. 1 была определена одна из цилиндрических функций — функция Бесселя.

Основным свойством цилиндрических функций является их поведение при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$ (асимптотическое поведение). Ниже будет показано, что любая цилиндрическая функция однозначно определяется своей асимптотикой при $x \rightarrow \infty$, точнее, главным членом асимптотического разложения.

Докажем, что любая вещественная цилиндрическая функция при больших x представима в виде

$$y_v(x) = \gamma_\infty \frac{\sin(x + \delta_\infty)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (30)$$

где $\gamma_\infty \neq 0$, δ_∞ — некоторые постоянные, $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ означает члены порядка не ниже $\frac{1}{x^{3/2}}$.