ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Имеется выборка из N значений некоторой случайной величины X, имеющей нормальный закон распределения Гаусса с параметрами: $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$

Требуется построить доверительные интервалы для параметров нормального закона распределения случайной величины X с заданным уровнем значимости α
(или с коэффициентом доверия $\beta=1-\alpha$). При этом используются распределение Гаусса или t-распределение Стьюдента.

$$DATA := \begin{pmatrix} 10.2 \\ 10.5 \\ 10.3 \\ 9.98 \\ 10.1 \\ 10.2 \\ 9.99 \\ 10.4 \\ 10.0 \\ 9.97 \end{pmatrix}$$

Числовые данные, представляющие собой значения случайной величины X, находятся в матрице DATA и представляют некоторый числовой массив. Количество записей в массиве определяется автоматически.

$N := length(DATA)$

$N = 10$

$X\_data := sort(DATA)$

Строим теперь вариационный ряд X_data, представляющий собой значения случайной величины X, записанные в порядке их возрастания.

$X\_data =$

	1
1	9.97
2	9.98
3	9.99
4	10
5	10.1
6	10.2
7	10.2
8	10.3
9	10.4
10	10.5

Вычисляем статистические характеристики вариационного ряда - выборочное среднее значение X_{mean} и выборочную дисперсию $D = s^2$. Используем статистические функции программы Mathcad:

$$X_{mean} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \qquad D = s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - X_{mean}\right)^2 \qquad s = \sqrt{D}$$

По статистическим средним оценим параметры: $X_{\text{mean}} \approx a,\ s \approx \sigma$.

Выборочное (эмпирическое) среднее значение

$$Xmean := mean(X\_data) \qquad Xmean = 10.164$$

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X\_data_i = 10.164$$

Выборочное (эмпирическое) значение несмещенной дисперсии:

$$D := Var(X\_data) \qquad D = 0.036$$

$$\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(X\_data_i - Xmean\right)^2 = 0.036$$

Выборочное (эмпирическое) значение несмещенного среднеквадратичного отклонения:

$$s := Stdev(X\_data) \qquad s = 0.18928$$

$$\sqrt{D} = 0.18928$$

Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины X, $M(X) = a$ при *известной дисперсии* $D(X) = \sigma^2$.

Предположим, что найденные эмпирические дисперсии и среднеквадратичного отклонения являются точными значениями этих величин. Тогда $D(X) = s^2$ и $\sigma = s$. В этом случае доверительный интервал для a находится по формуле: $X_{\text{mean}} - \varepsilon_a < a < X_{\text{mean}} + \varepsilon_a$, где

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma \cdot x'_\alpha}{\sqrt{N}}$$

$x_\alpha{}'$ - двухсторонняя квантиль стандартного нормального распределения с заданным уровнем значимости α. Вычисления в **Mathcad**:

$$\alpha := 0.01 \qquad qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) = 2.576 \qquad \varepsilon := \frac{s}{\sqrt{N}} \cdot qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$$

$$Xmean - \varepsilon = 10.01 \qquad Xmean + \varepsilon = 10.318 \qquad \varepsilon = 0.154$$

Построение доверительного интервала для математического ожидания случайной величины x,
$M(X) = a$ при ***неизвестной дисперсии*** $D(X) = \sigma^2$.

При неизвестном точном значении дисперсии и среднеквадратичного отклонения для оценки математического ожидания случайной величины X применяется распределение Стьюдента (t-распределение) с N -1 степенью свободы. В этом случае доверительный интервал для a находится по формуле: $X_{\text{mean}} - \varepsilon_\alpha < a < X_{\text{mean}} + \varepsilon_\alpha$, где ε_α - новый радиус доверительного интервала.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma \cdot t_\alpha}{\sqrt{N}}$$

$t_\alpha = t_\alpha(N - 1)$- двухсторонняя квантиль распределения Стьюдента с N -1 степенью свободы для заданного уровня значимости a.
Вычисления проводим в **Mathcad**:

$\alpha := 0.01$ $\quad qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right) = 3.25$ $\quad \varepsilon := \frac{s}{\sqrt{N}} \cdot qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 1\right)$

$Xmean - \varepsilon = 9.969$ $\quad Xmean + \varepsilon = 10.359$ $\quad \varepsilon = 0.195$